MAI 2 - domácí úkol 4

Opakování „základních" pojmů, zvláště totálního diferenciálu:
(prosím, přečtěte si všechny příklady a zkuste vyřešit aspoň dva z nich)

1. Lze následující funkce spojitě rozšířit na R^2?

   a) $f(x,y)=\dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}$; b) $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{2x}$; c) $f(x,y)=\dfrac{\sin x+\sin y}{x+y}$.

2. Zkuste příklady z minulého domácího úkolu, pokud jste je ještě neřešili:

   a) Ukažte, že pro malá x,y platí $arctg\dfrac{x+y}{1+xy}\cong x+y$.

   b) Ukažte, že funkce $f(x,y)=\sqrt{|x.y|}$ není diferencovatelná v bodě $(0,0)$, i když existují

   parciální derivace $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ a $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

Nebo „nové" příklady:

3. Je dána funkce f : $f(x,y)=xy$ pro $|x|\geq|y|$, $f(x,y)=0$ pro $|x|<|y|$.

   (i) Vyšetřete spojitost funkce f v R^2;

   (ii) Vypočítejte $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ a $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$;

   (iii) Vyšetřete, zda je funkce f v bodě $(0,0)$ diferencovatelná.

   (iv) Ukažte, že $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)\neq\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$.

4. Je dána funkce f : $f(x,y)=(x^2+y^2)\sin(\dfrac{1}{x^2+y^2})$ pro $(x,y)\neq(0,0)$, $f(0,0)=0$.

   a) Ukažte, že funkce f je spojitá v R^2 .

   b) Vypočítejte $\nabla f(0,0)$;

   c) Ukažte, že funkce f je v bodě $(0,0)$ diferencovatelná, i když nemá bodě $(0,0)$ spojité parciální derivace.

5. a) Ukažte, že je-li funkce $f(X)$ diferencovatelná v bodě $X_0\in R^n$, pak má pro libovolný vektor $\vec{a}\in R^n$, $\vec{a}\neq\vec{o}$ (tak zvanou) derivaci ve směru vektoru $\vec{a}$:

   $$D_{\vec{a}}f(X_0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(X_0+t\vec{a})-f(X_0)}{t}=\langle\nabla f(X_0),\vec{a}\rangle .$$

   b) Zjistěte, zda funkce $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ je v bodě $(1,1)$ ve směru vektoru $\vec{a}=(2,1)$ rostoucí nebo klesající. Najděte vektor $\vec{a}$, $\|\vec{a}\|=1$, v jehož směru funkce f v bodě $(1,1)$ roste nejrychleji.

A příklady k promyšlení jako příprava na příští cvičení 4.11.2021:

Derivace složené funkce více proměnných (promyslete, prosím, co „nejde"- probereme na příštím cvičení)

1. Derivace složené funkce více proměnných: „technika" derivování – předpokládáme, že platí předpoklady pro užití „řetízkového" pravidla - jaké to jsou předpoklady?
   a) Je-li $g(t) = f(\sin t, t^2)$, určete $g'(t)$ a $g''(t)$.
   b) Určete $g'(x)$ a $g''(x)$, je-li $g(x) = F(x, \varphi(x))$.
   c) Určete parciální derivace 1.řádu a některou parciální derivaci 2. řádu funkce g , je-li

      (i) $g(x,y) = f(x^2 y, \frac{x}{y})$; (ii) $g(x,y) = f(x^2 + y^2, xy, \frac{y}{x})$; (iii) $g(x,y,z) = f(\frac{x}{y}, \frac{y}{z})$.

   d) Určete parciální derivace 1. a 2. řádu funkce $g(x,y) = F(x, y, \varphi(x,y))$.

2*. Transformujte diferenciální operátor $x \cdot \frac{\partial f}{\partial y} - y \cdot \frac{\partial f}{\partial x}$ do polárních souřadnic

($x = r\cos\varphi, x = r\sin\varphi$, $r \in (0,\infty)$, $\varphi \in [0,2\pi]$).

(úloha pro ty, co by chtěli vyřešit rovnici $x \cdot \frac{\partial f}{\partial y} - y \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = 0$)